1913AN....194..359

sumption that they are actual ellipsoids of equilibrium. Our best guide is *G. H. Darwin's* work on masses of homogeneous, incompressible fluid. The actual stars are undoubtedly denser toward the center, which tends toward a smaller ellipticity, and they are composed of elastic and expansible material, which, as *Jeans* has shown [1]), may cause ellipticity or even instability to set in for a much smaller rate of rotation than would be the case for a mass of incompressible fluid of equal mean density. The results given below may perhaps give a fair approximation to the relative magnitude of the third axis of the ellipsoids, but should be considered as only an indication of the possible order of magnitude of their densities.

From *Darwin's* paper [2]) we may take the following values for the dimensions and angular velocity of the *Jacobi*an ellipsoids of homogeneous incompressible fluid, the unit of length being the radius of the sphere of equal volume, and the unit of density being so chosen that the *Gauß*ian constant is unity. The fifth of these computed ellipsoids represents the condition just beyond which instability occurs and the pear-shaped figure begins to form.

Table III. *Jacobi's* Ellipsoids of Equilibrium.

No.	a	b	c	$\omega^2/4\pi\varrho$	b/a	c/a
1	1.197	1.197	0.698	0.0936	1.000	0.583
2	1.279	1.123	0.696	0.093	0.879	0.544
3	1.383	1.045	0.692	0.0906	0.756	0.501
4	1.601	0.924	0.677	0.0830	0.577	0.423
5	1.899	0.811	0.649	0.0705	0.427	0.342
6	2.346	0.702	0.607	0.0536	0.299	0.259
7	3.136	0.586	0.545	0.0334	0.187	0.174

In Table III the axes of the ellipsoids are designated by a, b, c, in descending order of magnitude; the angular velocity is denoted by ω, and the density by ϱ. For the three ellipsoidal stars, the quantity $b/a = (1-\varepsilon^2)^{1/2}$ would be obtained from the light curves if the inclination were known. We will take $i = 90°$, which is probably near the truth, at least for the two stars of greatest range, and this will give the minimum value of the ellipticity. Plotting the values of b/a in the above table against c/a, and against $\omega^2/4\pi\varrho$, we can read from the curves the values of the angular velocity and relative polar axis for each of the variables. The density is then readily computed from the known period of rotation. The results are tabulated below.

	RU Camelopardalis		SZ Tauri		S Antliae	
	Uniform	Darkened	Uniform	Darken.	Uniform	Darken.
ε^2	0.82	0.62	0.67	0.47	0.475	0.33
b/a	0.424	0.617	0.574	0.728	0.724	0.819
c/a	0.341	0.443	0.421	0.490	0.489	0.524
$\omega^2/4\pi\varrho$	0.0703	0.0853	0.0828	0.0897	0.0897	0.0922
ϱ	0.00003	0.00003	0.0014	0.0013	0.119	0.116

The densities are expressed in terms of the mean solar density. It should be noted that the uniform solution for RU Camelopardalis gives dimensions practically identical to those of the homogeneous ellipsoid that is near to instability and to the transformation into the pear-shaped figure.

Princeton University Observatory, 1913 March 1.

Harlow Shapley.

[1]) Philosophical Transactions, A, **201**.157; A, **199**.1.
[2]) Roy. Soc. Proc. **41**.319, 1887.

Die Veränderlichkeit des Polarsterns. Von *Ant. Pannekoek.*

Als ich in den Jahren 1889 und 1890 Beobachtungen der Helligkeit mehrerer Sterne zweiter und dritter Größe nach *Argelanders* Methode anstellte, zeigte sich bei einigen Sternen ein starker Verdacht der Veränderlichkeit, u. a. bei α Ursae minoris. Die Schätzungen zeigten eine Periode von etwas weniger als 4 Tagen; da aber die Amplitude äußerst gering war, gelang es mir nicht, einen Wert für die Periode zu finden, der den Beobachtungen genügte, und damit die Veränderlichkeit zweifelsfrei festzustellen. Als dann nachher *Campbell* eine Veränderlichkeit der visuellen Geschwindigkeit in einer Periode von 3.968 Tagen feststellte, und sich bei einer Untersuchung im Jahre 1906 zeigte, daß der Polarstern den c-Charakter des Spektrums und die geringe Dichtigkeit mit den kurzperiodischen Veränderlichen gemeinsam hat, wurde die Realität einer Veränderlichkeit im hohen Maße wahrscheinlich. *Hertzsprung* hat dann neulich auf photographischem Wege eine Veränderlichkeit mit einer Amplitude von 0.17 Größenklassen nachgewiesen und *Stebbins* hat sie mit dem Selenphotometer bestätigt.

Die Beobachtungen, die ich in den Jahren 1890 bis 1899 mit freiem Auge angestellt habe, zerfallen in zwei getrennte Reihen, Vergleichungen mit α Persei, β und γ Andromedae in der zweiten und Vergleichungen mit ε und η Ursae majoris in der ersten Hälfte jedes Jahres. Werden sie alle mit dem Periodenwert 3^d968 auf eine einzige Periode, 3. bis 7. August 1894, zurückgebracht und dann nach der Phase geordnet, so ergeben sich folgende Mittelwerte:

Erste Reihe.

Vergl.-St.: α Persei = 6.3, β Andr. = 3.8, γ Andr. = 3.1.

Epoche	Helligk.	Anz.	B−R
Aug. 3.12	3.72	(18)	+0.03
3.42	3.94	(16)	+0.11
3.73	4.11	(21)	+0.08
3.96	3.91	(17)	−0.29
4.22	3.94	(20)	−0.42
4.54	4.68	(17)	+0.18
4.76	4.86	(16)	+0.33
4.94	4.76	(16)	+0.24
5.18	4.11	(17)	−0.34
5.52	4.45	(14)	+0.19
5.76	4.11	(20)	+0.02
5.94	3.67	(18)	−0.29
6.23	3.67	(16)	−0.11
6.46	3.78	(14)	+0.10
6.73	3.79	(19)	+0.16

Zweite Reihe.

Vergl.-St.: ε Ursae maj. = 2.4, η Ursae maj. = 0.0.

Epoche	Helligk.	Anz.	B−R
Aug. 3.21	0.59	(18)	−0.03
3.48	0.68	(16)	−0.08
3.65	0.59	(13)	−0.28
3.92	1.13	(18)	+0.07
4.25	1.39	(20)	+0.10
4.46	1.40	(22)	0.00
4.65	1.69	(24)	+0.22
4.94	1.55	(14)	+0.05
5.22	1.20	(17)	−0.23
5.46	1.27	(18)	−0.03
5.72	1.02	(20)	−0.11
6.22	0.74	(19)	−0.04
6.48	0.86	(16)	+0.22
6.86	0.67	(16)	+0.11

Die Veränderlichkeit des Polarsterns tritt in beiden

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1913AN....194..359

Reihen klar zu Tage. Sucht man die Helligkeit durch eine Sinusoide darzustellen, so findet man

1. Reihe: $4.08+0.45\sin(\varphi-72\overset{\circ}{.}0)$ Max. Aug. $4.79\pm 0\overset{d}{.}11$
2. Reihe: $1.03+0.47\sin(\varphi-78\overset{\circ}{.}9)$ » » $4.86\pm 0\overset{d}{.}11$.

Der m. F. einer Mittelzahl ergibt sich zu 0.22, einer einzigen Beobachtung zu 0.84, und die Zeit des Maximums wird, nach Reduktion auf Greenwich

$$1894 \text{ Aug. } 4.81 = \text{J. D. } 2413045.81 \pm 0\overset{d}{.}08 \text{ m. Z. Gr.}$$

Zur Reduktion der benutzten Skalen auf photometrische Größen wurde für die Vergleichsterne und einige weitere daran angeschlossene Sterne die Größe berechnet, und dafür das Mittel der Ergebnisse von Harv. Ann. 14, Harv. Ann. 44, Potsdam Photometer CII und Potsdam Photometer CIII genommen, nachdem sie auf das in meiner Dissertation aufgestellte System H_r reduziert waren [1]).

	Größe	Farbe	Skale		Größe	Farbe	Skale
α Persei	$1\overset{m}{.}91$	$3\overset{c}{.}4$	$6\overset{n}{.}3$	ε Ursae maj.	$1\overset{m}{.}89$	$1\overset{c}{.}8$	$2\overset{n}{.}4$
α Arietis	2.03	5.4	5.4	η »	2.02	1.4	0.0
β Andromed.	2.10	6.2	3.8	ζ »	2.20	2.1	−3.6
γ »	2.14	5.2	3.1	α Coron. bor.	2.37	1.8	−4.8
α »	2.17	1.8	2.3	ε Bootis	2.50	4.8	−5.7
γ Cassiopeiae	2.28	2.1	0.8	β Ursae maj.	2.54	1.7	−8.9
β »	2.41	2.9	−1.7	γ »	2.55	1.8	−9.7
α Ursae maj.	1.85	4.9	4.0				

Die Ausgleichung mit Hinzuziehung eines von der Farbe abhängigen Einflusses ergab

$$\left.\begin{array}{ll} \text{1. Reihe:} & m = 2.335 - 0.065\,n \\ \text{2. Reihe:} & m = 2.07 \;\;- 0.059\,n \end{array}\right\} + 0.020\,(c-3.7)\,.$$

Die Darstellung der Helligkeit des Polarsterns durch eine Sinusformel wird dann in Größenklassen

$$\text{1. Reihe: } 2.07 - 0\overset{m}{.}029\sin(\varphi-72\overset{\circ}{.}0)$$
$$\text{2. Reihe: } 2.01 - 0\overset{m}{.}028\sin(\varphi-78\overset{\circ}{.}9)\,.$$

Die Amplitude des Lichtwechsels ist also 0.057 Größenklassen.

In ähnlicher Weise habe ich die Beobachtungen untersucht, die *G. Müller* 1878–81 in Potsdam zur Bestimmung der atmosphärischen Extinktion anstellte [2]) und die aus photometrischen Messungen der Helligkeitsdifferenzen zwischen α Ursae min. und 5 anderen Sternen bestehen. Nach Ausschluß aller als unsicher bezeichneten und aller Beobachtungen, bei denen $z > 60°$, wurden für die übrigen die »Abweichungen vom Mittel« (Tabelle IV vorletzte Spalte S. 251–265) mit umgekehrtem Zeichen (damit eine größere Helligkeit des Polarsterns durch positive Abweichungen bezeichnet wird) nach der Phase geordnet, zu Mittelwerten zusammengenommen, und mit dem Faktor eine Einheit $= 0\overset{m}{.}0025$ multipliziert. Diese Mittel sind:

Phase 1879	Abweich.	B−R	Phase 1879	Abweich.	B−R
Dez. 12.02	$+0\overset{m}{.}022$	$+0\overset{m}{.}001$	Dez. 14.11	$-0\overset{m}{.}028$	$-0\overset{m}{.}012$
12.34	+0.030	0.000	14.50	−0.009	+0.015
12.64	+0.047	+0.014	14.81	−0.009	+0.013
12.92	+0.008	−0.021	15.05	−0.021	−0.004
13.21	+0.028	+0.008	15.20	−0.048	−0.036
13.63	+0.006	+0.003	15.34	+0.017	+0.022
13.84	−0.010	−0.004	15.69	+0.008	−0.001

Sie lassen sich durch eine Sinusformel darstellen:

$$+\,0\overset{m}{.}004 + 0\overset{m}{.}028\sin(\varphi+35°)$$

Maximum 1879 Dez. 12.61 = Dez. 12.57 ($\pm 0\overset{d}{.}14$) m. Z. Gr.

Für die nahezu gleichzeitigen photometr. Messungen auf der Harvard Sternwarte, bei denen Polaris als Vergleichstern benutzt wurde, hat *Pickering* schon die Mittelwerte der Abweichungen zusammengestellt [3]). Sie lassen sich durch die Sinusformel $-0\overset{m}{.}011 + 0\overset{m}{.}039\sin(\varphi+254°)$ am besten darstellen und ergeben ein Maximum für Phase 2.16, also für J. D. $2408228.45 \pm 0\overset{d}{.}24$ und eine Amplitude von 0.078 Größenklassen.

Die folgende Zusammenstellung gibt die Resultate der bisher bearbeiteten Beobachtungsreihen, nebst einer Vergleichung mit der *Hertzsprung*schen Formel:

$$\text{Max.} = \text{J. D. } 2418985.86 + 3\overset{d}{.}9681\,E.$$

Jahr	E	Maximum	B−R	Amplitude	Beobachter	B−R′
1879	−2845	$2407696.57 \pm 0\overset{d}{.}14$	$-0\overset{d}{.}05$	$0\overset{m}{.}056$ vis.	*Müller*	$-0\overset{d}{.}13$
1881	−2711	8228.45 ± 0.24	+0.11	0.078 vis.	Harvard	+0.03
1894	−1497	2413045.81 ± 0.08	+0.20	0.057 vis.	*Pannekoek*	+0.12
1910	0	8985.86 ± 0.08	0.00	0.171 photogr.	*Hertzsprung*	−0.07
1911	0	8985.94 ± 0.09	+0.08	0.078 selen.	*Stebbins*	+0.01

Der Versuch, aus diesen Abweichungen eine Korrektion der Formel herzuleiten, ergab für die Periode nur eine Änderung $-0\overset{d}{.}00001 \pm 0\overset{d}{.}00004$, und für die Epoche eine Korrektion $+0\overset{d}{.}07$, wobei die Abweichungen der letzten Spalte übrigbleiben. Es ist also nach dem vorhandenen Material anzunehmen:

$$\text{Maximum J. D. } 2418985.93\,(\pm 0\overset{d}{.}06) + 3\overset{d}{.}96809\cdot E\,(\pm 0\overset{d}{.}00004)\,.$$

Bremen, 1913 Febr. 1.

Ant. Pannekoek.

[1]) *A. Pannekoek.* Untersuchungen über den Lichtwechsel Algols. S. 158. Dort sind die Korrektionen der Katalogwerte für Harv. 14 und Potsdam CII gegeben. Für Potsdam CIII ist eine konstante Korrektion $-0\overset{m}{.}23$ angenommen; für Harv. 44 sind zuerst die Differenzen $H44 - H14$ angebracht, die aus den in Potsdam Publ. Bd. 17, p. XXIII gegebenen Zahlen durch Ausgleichung gewonnen wurden.

[2]) Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam Bd. III.

[3]) Astron. Nachr. 4597 (Bd. 192, S. 219); Harv. Zirk. 174, wo die Berechnung der Epoche des Maximums verfehlt ist ($E = 2073$ ergibt die Formel 2408226.29, nicht 2408227.0, wie dort angenommen wurde).

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1913AN....194..359

Tafel zur Berechnung der *Gibbs*schen Ausdrücke. Von *Norbert Haponowicz.*

Die *Gibbs*sche Methode der Bahnbestimmung hat keine größere Verbreitung gefunden, wohl deshalb, weil sie sich für die numerische Rechnung nicht einfach genug gestalten läßt. Die von *Gibbs* gegebenen Ausdrücke für die Dreiecksverhältnisse können aber gut in der üblichen Methode der Bahnbestimmung für die zweite und die nächsten Hypothesenrechnungen angewandt werden. Diese Ausdrücke reichen für 6-stellige Rechnung wohl bis zu Intervallen von 60 Tagen aus. Ihre Auswertung ist aber den üblichen Rechnungsarten (*Gauß*, *Encke*, *Hansen*) gegenüber bedeutend kürzer. Es fällt nämlich die Ausrechnung der Bahnlage und der heliozentrischen Bogen weg. Es würde also ihre Anwendung in der Hypothesenrechnung, besonders in Fällen, die mehrmalige Wiederholung verlangen, eine Kürzung der Rechnungsarbeit bedeuten.

Von diesem Gedanken geleitet, habe ich eine Tafel zusammengestellt, welche gestattet, die Größen B_1 B_2 B_3 durch das Verhältnis der Zwischenzeiten auszudrücken. Setzt man nämlich[1]

$$\tau_1/\tau_2 = n_1^0$$

so lassen sich diese Größen folgendermaßen darstellen:

$$12B_1 = -\tau_1^2 + \tau_1\tau_3 + \tau_3^2 = [1 - n_1^0 - (n_1^0)^2]\,\tau_2^2 = \alpha\tau_2^2$$
$$12B_2 = \tau_1^2 + 3\tau_1\tau_3 + \tau_3^2 = [1 + n_1^0 - (n_1^0)^2]\,\tau_2^2 = \beta\tau_2^2$$
$$12B_3 = \tau_1^2 + \tau_1\tau_3 - \tau_3^2 = [n_1^0 - (1 - n_1^0)^2]\,\tau_2^2 = \gamma\,\tau_2^2.$$

Die α β γ sind Funktionen von n_1^0 und lassen sich leicht tabulieren. Der Tafelumfang wird bedeutend dadurch verkleinert, daß, wie man leicht einsieht, für den Wert $1 - n_1^0$ die Größen α, β, γ entsprechend γ β α für n_1^0 gleich sind. Der Wert von α wird für

$$n_1^0 = {}^1/_2(\sqrt{5} - 1) = 0.618$$

(der von γ demnach für $1 - 0.618 = 0.382$) gleich null. Die Logarithmen dieser Funktionen ändern sich also in der Nähe dieser Werte so stark, daß die Interpolation zu ungenau wäre. Der logarithmischen Tafel I wurde deshalb noch eine numerische angeschlossen, die die Werte von α für $n_1^0 = 0.53$ bis 0.65 umfaßt.

Ich will nun kurz die Formeln zusammenstellen, die zur Benutzung der Tafel dienen:

Aus den (schon mit der *Gauß*schen Konstanten multiplizierten) Zwischenzeiten τ_1 und τ_2 berechnet man $n_1^0 = \tau_1/\tau_2$, findet aus den Tafeln $\log\alpha$, $\log\beta$, $\log\gamma$ (es genügt gewöhnlich vierstellige Werte zu entnehmen) und damit

$$C_1 = 1 + {}^1/_{12}\,\alpha\,\tau_2^2/r_1^3$$
$$C_2 = 1 - {}^1/_{12}\,\beta\,\tau_2^2/r_2^3 \qquad C_3 = 1 + {}^1/_{12}\,\gamma\,\tau_2^2/r_3^3.$$

Es sind sodann die gesuchten, für die weitere Rechnung nötigen Werte

$$y_2/y_1 = C_1/C_2 \qquad y_2/y_3 = C_3/C_2.$$

Die *Gibbs*schen Formeln geben übrigens auch die y selbst. Wie man leicht einsieht, ist für $n_1^0 = 1$

$$\lim y_3 = 1 \qquad \lim r_2 = r_1$$

also

$$y_2 = \lim y_2/y_3 = \lim C_3/C_2 = (1 + {}^1/_{12}\,\tau_2^2/r_3^3)/(1 - {}^1/_{12}\,\tau_2^2/r_1^3).$$

Diese Formel ist in bezug auf den ersten und dritten Ort unsymmetrisch, der Unterschied aber, den man bei Vertauschung der Örter erhält, ist von der fünften Ordnung. Entwickelt man die Formel nach Potenzen von τ_2^2 und setzt in dem mit τ_2^4 multiplizierten Gliede statt r_1^{-6} den Wert $r_1^{-3}r_3^{-3}$, so erhält man

$$y_2 = 1 + {}^1/_{12}\,\tau_2^2\,(r_1^{-3} + r_3^{-3}) + ({}^1/_{12}\,\tau_2^2)^2 \cdot 2\,r_1^{-3}r_3^{-3}$$

und analoge Ausdrücke für y_1 und y_3.

Ich mache noch die Bemerkung, daß, wenn man in der ersten Hypothese eine genäherte Annahme über die Entfernung machen kann (etwa einer Kreisbahnbestimmung entnommen, oder für die kleinen Planeten einfach $r_1 = r_2 = r_3 = 2.5$), so erhält man aus den *Gibbs*schen Formeln folgende genauere Ausdrücke (im Schema des *Bauschinger*schen Lehrbuches)

$$v_1 = q_0\,(1 + n_1^0)/C_2 \qquad v_2 = q_0\,(1 + n_3^0)/C_2$$

wo in $C_2 = 1 - {}^1/_{12}\,\beta\,\tau_2^2/r_2^3$ für r_2 der Näherungswert gesetzt wird.

Tafel I. Logarithmen.

n_1^0	$\log\alpha$	$\log\beta$	$\log\gamma$	$1-n_1^0$
0.300	9.78533	0.08278	9.27875n	0.700
301	78419	293	27323n	699
302	78304	307	26765n	698
303	78189	321	26200n	697
304	78074	335	25628n	696
305	77958	349	25048n	695
306	77842	363	24461n	694
307	77725	377	23867n	693
308	77607	391	23265n	692
309	77490	405	22655n	691
$1-n_1^0$	$\log\gamma$	$\log\beta$	$\log\alpha$	n_1^0

n_1^0	$\log\alpha$	$\log\beta$	$\log\gamma$	$1-n_1^0$
0.310	9.77371	0.08418	9.22037n	0.690
311	77253	432	21410n	689
312	77133	445	20775n	688
313	77014	459	20131n	687
314	76894	472	19478n	686
315	76773	485	18816n	685
316	76652	498	18143n	684
317	76530	512	17461n	683
318	76408	525	16768n	682
319	76286	538	16065n	681
$1-n_1^0$	$\log\gamma$	$\log\beta$	$\log\alpha$	n_1^0

n_1^0	$\log\alpha$	$\log\beta$	$\log\gamma$	$1-n_1^0$
0.320	9.76163	0.08550	9.15351n	0.680
321	76039	563	14626n	679
322	75915	576	13888n	678
323	75790	589	13139n	677
324	75665	601	12377n	676
325	75540	614	11603n	675
326	75414	626	10815n	674
327	75287	638	10013n	673
328	75160	651	09196n	672
329	75032	663	08365n	671
$1-n_1^0$	$\log\gamma$	$\log\beta$	$\log\alpha$	n_1^0

[1]) Ich benutze die Bezeichnungen nach Prof. *Bauschinger*s »Bahnbestimmung der Himmelskörper«.

John G. Wolbach Library, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics • Provided by the NASA Astrophysics Data System